DODATEK DO ROCZNIKA POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO

TOM IX

S. K. ZAREMBA

O RÓWNANIACH PARATINGENSOWYCH

WYDANO Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH
I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO

KRAKÓW 1935
DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
POD ZARZĄDEM J. FILIPOWSKIEGO

Dodatek do Rocznika Polskiego Towarzystwa Matematycznego ukazuje się w miarę potrzeby ogłaszania artykułów, pisanych w języku polskim; dotychczas ukazał się Tom I za rok 1922, Tom II za rok 1923, Tom III za rok 1927, Tom IV za rok 1928, Tom V za rok 1931, Tom VI za rok 1934, oraz Tomy VII i VIII za rok 1935.

DODATEK DO ROCZNIKA POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO

TOM IX

S. K. ZAREMBA

O RÓWNANIACH PARATINGENSOWYCH

WYDANO Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH
I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO

KRAKÓW 1935
DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
POD ZARZĄDEM J. FILIPOWSKIEGO

Dodatek do Rocznika Polskiego Towarzystwa Matematycznego ukazuje się w miarę potrzeby ogłaszania artykułów, pisanych w języku polskim; dotychczas ukazał się Tom I za rok 1922, Tom II za rok 1923, Tom III za rok 1927, Tom IV za rok 1928, Tom V za rok 1931, Tom VI za rok 1934, oraz Tomy VII i VIII za rok 1935.

S. K. Zaremba

O równaniach paratingensowych

Kilka miesięcy temu ogłosiłem notę[1]), w której zajmowałem się pewnem uogólnieniem pojęcia równania różniczkowego, opartem na rozważaniu paratingensu[2]). Ograniczyłem się w tej nocie do przypadku dwóch wymiarów, uważając przejście do n wymiarów za łatwe. Z drugiej strony, nieco później wystąpił A. Marchaud z notą[3]), w której opracowuje analogiczne zagadnienie dla przestrzeni n-wymiarowej, wychodząc z pojęcia contingensu[4]); jednakowoż p. Marchaud przyjmuje założenia znacznie dalej idące od moich. Ponieważ wszystkie wyniki ogłoszone przez p. Marchaud można otrzymać, wychodząc z równań paratingesowych w założeniach odpowiadających tym, które przyjąłem w swej nocie i ponieważ te uogólnienia pojęcia równania różniczkowego znajdują pewne zastosowania we fizyce[5]), sądzę, iż warto opracować szczegółowo zagadnienie równań paratingensowych w przestrzeni n-wymiarowej.

---

[1]) *Sur une extension de la notion d'équation différentielle*, C. R. de l'Acad. des Sciences, **199**, Paryż, 1934, 545—548.

[2]) Zob. np. G. Bouligand, *Introduction à la Géométrie infinitésimale directe*, Paryż, 1932, str. 72 i nast.: „Powiemy, iż prosta RS przechodząca przez punkt skupienia O zbioru punktowego E należy do *paratingensu* E w [punkcie] O,... jeżeli można znaleźć ciąg odcinków $P\ Q_i$ (właściwych), których końce należą do E i zdążają do O, a przytem takich, aby proste, na których one leżą zdążały do prostej RS albo też zlewały się z nią".

[3]) *Sur les champs continus de demi-cônes convexes et leurs intégrales*, C. R. de l'Acad. des Sciences, **199**, Paryż, 1934, 1278—1280.

[4]) Cf. G. Bouligand, *loc. cit.*, str. 66. Chodzi o zbiór wszystkich półstycznych w danym punkcie. Promień OT, wychodzący z punktu skupienia O zbioru E nazywać się będzie *pół-styczną* w punkcie O do zbioru E, jeśli jest granicą ciągu promieni $\{O T_i\}$, wyznaczonego przez ciąg $\{T_i\}$, zdążający do O i złożony z punktów należących do E.

[5]) Cf. G. Bouligand, *Sur quelques processus de déterminisme partiel* C. R. de l'Acad. des Sciences, **200**, Paryż, 1935, 634—636.

§ 1. *Pola* (N_p)

Zauważmy przedewszystkiem, iż zapomocą zbioru prostych przestrzeni Euklidesowej p-wymiarowej, przechodzących przez dowolny punkt tej przestrzeni, można utworzyć przestrzeń (D) Fréchet'a[1]), przyjmując np. odległość dwóch prostych, rozważanych, jako elementy będącej w mowie przestrzeni, za równą najmniejszej mierze bezwzględnej kąta, utworzonego przez te dwie proste. Można zatem mówić o *continuach prostych*, *przechodzących przez jakiś punkt*. Wobec tego, wprowadzamy definicję następującą:

1·1. **Definicja.** Nazwiemy *miotełką przestrzeni p-wymiarowej* każde continuum prostych tej przestrzeni, przechodzących przez określony punkt — który nazwiemy *wierzchołkiem miotełki* — przyczem continuum to może się redukować do jednej prostej i ma czynić zadość warunkowi, że jeśli dwie różne proste doń należą, to zawiera ono continuum prostych, przechodzących przez wierzchołek miotełki, zawierające obie te proste i położone w jakiejś płaszczyźnie (dwuwymiarowej).

Ten ostatni warunek dotyczy, jak widać, pewnego rodzaju wypukłości. Nasze miotełki odpowiadają stożkom, powstającym przez połączenie dwóch symetrycznych pół-stożków wypukłych p. Marchaud. Wolałem jednak posługiwać się nazwą miotełki, raczej, niż stożka, po pierwsze, aby się dostosować do terminologji, przyjętej w mej nocie, ogłoszonej w C. R. paryskich (*loc. cit.*)[2]), po wtóre zaś również dlatego, iż termin, użyty przez p. Marchaud, zanadto — mojem zdaniem — narzuca nieadekwatną w danym razie ideę powierzchni.

Powiemy, iż miotełka przestrzeni p-wymiarowej jest *prosta*, jeśli istnieje hyperpowierzchnia $p-1$ wymiarowa, przechodząca przez wierzchołek miotełki i nie zawierająca żadnej z prostych, wchodzących w jej skład.

Rozważanie przestrzeni (D), utworzonej zapomocą prostych przestrzeni p-wymiarowej, przechodzących przez dany punkt, umożliwia wprowadzenie odległości dwóch miotełek tej samej przestrzeni p-wymiarowej, mających wspólny wierzchołek[3]). Oznaczając przez

---

[1]) Cf. M. Fréchet, *Les espaces abstraits*, Paryż, 1928, str. 61 i nast.

[2]) Nazwę *miotełki* (*pinceau de droites*) zawdzięczam p. G. Bouligand, który był łaskaw mi ją zaproponować w prywatnej korespondencji.

[3]) Cf. F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Lipsk, 1914, str. 293—294,

a i b dwie miotełki o wspólnym wierzchołku, określamy zatem w sposób następujący ich odległość: oznaczamy najpierw przez $\overrightarrow{ab}$ maximum, dla wszystkich prostych, należących do a, najmniejszych miar bezwzględnych kątów, utworzonych przez każdą z nich z prostemi, wchodzącemi w skład b i tworzymy w podobny sposób liczbę $\overrightarrow{ba}$; największa z liczb $\overrightarrow{ab}$ i $\overrightarrow{ba}$ będzie wówczas odległością miotełek a i b.

1·2. **Uwaga.** Weźmy pod uwagę dowolne continuum prostych, należących do jakiejś przestrzeni p-wymiarowej i przechodzących przez któryś z jej punktów; jeżeli to continuum nie zawiera żadnej prostej, leżącej w jakiejś hyperpłaszczyźnie $p - 1$-wymiarowej, przechodzącej przez wspomniany punkt, wówczas iloczyn wszystkich miotełek, zawierających rozważane continuum i nie zawierających żadnych prostych, leżących w powyższej hyperpłaszczyźnie, stanowi znowuż miotełkę; jest to miotełka prosta, mianowicie najmniejsza z miotełek, zawierających dane continuum i nie mających wspólnych prostych ze wspomnianą hyperpłaszczyzną. Uważając tę hyperpłaszczyznę za stałą, łatwo dostrzec, iż odpowiedniość między continuum prostych i najmniejszą miotełką, zawierającą je, jest ciągła.

1·3. **Definicja.** Nazwiemy *polem* (N_p) każdą funkcję, przyporządkowującą każdemu punktowi jakiegoś obszaru[1]) przestrzeni Euklidesowej p-wymiarowej [który nazwiemy *obszarem* odnośnego *pola* (N_p)] miotełkę tej przestrzeni o wierzchołku w rozważanym punkcie w taki sposób, aby odpowiedniość ta była górnie półciągła ze względu na inkluzję[2]). Nazwiemy *regularnemi* punkty obszaru pola (N_p), dla których odnośna miotełka jest prosta; innym punktom obszaru nadamy miano *osobliwych*.

1·4. **Wniosek.** Zbiór punktów osobliwych pola (N_p) jest domknięty względem obszaru tego pola; przeciwnie zaś, zbiór punktów regularnych tegoż pola jest otwarty względem jego obszaru.

---

[1]) Przez *obszar* rozumiemy wynik dodania do dowolnej dziedziny (t. j. zbioru otwartego spójnego) części (ewentualnie pustej) lub całości jej brzegu.

[2]) Chcemy przez to powiedzieć, że jeśli P oznacza dowolny punkt obszaru pola (N_p), wówczas każda prosta, będąca granicą prostych, należących do miotełek pola w jego punktach nieskończenie bliskich punktu P, sama również należy do miotełki rozważanego pola w punkcie P. Por. np. Bouligand, *Introduction à la géométrie infinitésimale directe*, str. 75 i nast.

1·5. **Definicja.** O dwóch miotełkach tej samej przestrzeni powiemy, iż są *równoległe*, jeśli jedna z nich przechodzi w drugą przez translację.

§ 2. *Twierdzenie o egzystencji charakterystyk*

2·1. **Definicja.** Łuk prosty, względnie obwód Jordanowski, nazwiemy *charakterystyką* danego pola (N_p), jeśli jest zawarty w obszarze tego pola, a przytem w każdym jego punkcie jego paratingens zawiera się w miotełce tego pola, odpowiadającej odnośnemu punktowi. Przez *równanie paratingensowe*, wyznaczone przez dane pole (N_p), rozumieć będziemy warunek, któremu muszą podlegać łuki proste, względnie obwody Jordanowskie, aby stanowić charakterystyki rozważanego pola.

2·2. **Wniosek.** Każda charakterystyka dowolnego pola (N_p), nie przechodząca przez żaden punkt osobliwy tegoż, jest rektyfikowalna.

Rzeczywiście, jeżeli wprowadzimy układ współrzędnych Kartezjuszowskich prostokątnych, krzywa rozważana będzie mogła być w sąsiedztwie któregokolwiek jej punktu przedstawiona parametrycznie zapomocą funkcyj spełniających warunek Lipschitza, a zatem o wahaniu ograniczonem; atoli wiadomem jest [1]), iż krzywa taka jest rektyfikowalna.

2·3. **Wniosek.** Jeśli dane są dwa pola (N_p) takie, iż obszar pierwszego zawiera się w obszarze drugiego, a nadto w każdym punkcie obszaru pierwszego pola miotełka tegoż pola zawiera się w odnośnej miotełce drugiego pola, wówczas każda charakterystyka pierwszego pola jest zarazem charakterystyką drugiego.

2·4. **Uwaga.** Stosując do łuków prostych i obwodów Jordanowskich przestrzeni Euklidesowej p-wymiarowej pojęcie odległości parametrycznej [2]), znajdujemy, iż wytwarzają one przestrzeń (D) Fréchet'a.

---

[1]) Zob. np. H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, 2 wyd., Paryż, 1928, str. 63.

[2]) Por. np. W. Wilkosz, *Les propriétés topologiques du plan euclidien*, Paryż, 1931, str. 50—51. Rozważa się, dla każdej odpowiedniości jednojednoznacznej i ciągłej pomiędzy punktami danych dwóch łuków, względnie obwodów, największą odległość dwóch odpowiadających sobie punktów, a minimum otrzymanych w ten sposób liczb przy rozważaniu rozmaitych tego rodzaju odpowiedniości stanowi dległość parametryczną dwóch danych łuków (względnie obwodów).

2·5. **Lemat.** Jeżeli w każdym punkcie jakiegoś łuku MN przestrzeni Euklidesowej p-wymiarowej jego paratingens zawarty jest w miotełce równoległej do pewnej stałej miotełki prostej, którą oznaczamy przez a, wówczas prosta MN jest równoległa do jednej z prostych, zawartych w a [1]).

Dowód. Z założenia, istnieje płaszczyzna, przechodząca przez wierzchołek a i nie zawierająca żadnej prostej, należącej do tej miotełki. Niech będzie ε dowolna liczba dodatnia, mniejsza od najmniejszego kąta, utworzonego z taką płaszczyzną przez proste, należące do a i oznaczmy przez a_ε najmniejszą miotełkę, nie zawiewierającą żadnej z prostych rozważanej płaszczyzny, a pokrywającą ogół prostych, przechodzących przez wierzchołek a i przytem tworzących z jakiemiś prostemi tej miotełki kąty mniejsze lub równe ε (Cf. nr 1·2). Według twierdzenia Heine-Borela (zwanego również twierdzeniem Borel-Lebesgue'a), można teraz rozłożyć łuk MN na skończoną ilość łuków, powiedzmy MM_1, $M_1M_2,\ldots$, M_kN, takich aby każda z cięciw MM_1, $M_1M_2,\ldots$, M_kN była równoległa do jakiejś prostej, zawartej w a_ε. Jednakowoż, z uwagi na warunek wypukłości, zawarty w nrze 1·1, można udowodnić indukcyjnie, iż każda z prostych MM_1, $MM_2,\ldots$, MM_k, MN jest równoległa do jakiejś prostej, należącej do a_ε. Ponieważ liczba ε może być dowolnie mała, wnosimy stąd, iż prosta MN jest równoległa do jednej z prostych, należących do a_ε, c. b. d. o.

Z powyższego lematu wyprowadzimy już łatwo pewne twierdzenie, które ułatwi nam dowód twierdzenia o egzystencji charakterystyk pól (N_p) i które zarazem samo w sobie dostarcza jednej z najważniejszych własności równań paratingensowych. Twierdzenie to dobrze jest znane w odniesieniu do równań różniczkowych; oto ono:

2·6. **Twierdzenie.** Jeżeli jakiś łuk jest granicą ciągu charakterystyk dowolnie danego pola (N_p), a przytem nie zawiera punktów osobliwych tego pola i leży w jego obszarze, wówczas łuk ten jest jeszcze charakterystyką powyższego pola.

Dowód. Niech będzie $\{l_i\}$ rozważany ciąg łuków, l — łuk będący jego granicą, a P — dowolny punkt, leżący na l. Punkt P

---

[1]) Lemat analogiczny, lecz ogólniejszy, podał w innej formie A. Marchaud Por. np. jego rozprawę *Sur les champs de demi-cônes et les équations différentielles du premier ordre*, Bull. de la Soc. Math. de France, LXII, 1934, 1—38, w szczególności str. 11.

jest więc punktem regularnym rozważanego pola (N_p). Oznaczmy przez a miotełkę tego pola w punkcie P i nadajmy symbolowi a_ε to samo znaczenie, co w dowodzie poprzedniego lematu. Wskutek półciągłości pola, istnieje otoczenie punktu P, powiedzmy $V(P)$, takie, iż dla każdego punktu $V(P)$ miotełka prostych rozważanego pola jest równoległa do jakiejś miotełki, zawartej w a_ε.

Dzięki lokalnej spójności (własności Hahna-Mazurkiewicza)[1]) łuku l, jeśli dowolna sieczna, powiedzmy s, tego łuku przechodzi przez dwa różne punkty tego łuku, położone dostatecznie blisko punktu P, wówczas część łuku l, ograniczona przez powyższe dwa punkty, zawarta jest w $V(P)$. Sieczna s jest zatem granicą pewnego ciągu prostych, z których każda zawiera cięciwę jakiejś części łuku ciągu $\{l_i\}$, zawartej w $V(P)$. Atoli, według poprzedniego lematu, każda z tych prostych jest równoległa do jakiejś prostej, zawartej w a_ε, a przechodząc do granicy, rozciągamy ten wniosek i na samą sieczną s. Wynika stąd, iż paratingens łuku l w punkcie P zawiera się w a_ε, a zatem i w a, gdyż liczba ε jest dowolnie mała; twierdzenie jest zatem udowodnione.

2·7. **Uwaga.** Gdybyśmy w definicji miotełki (nr 1·1) pominęli warunek, dotyczący wypukłości, powyższe twierdzenie, jak również lemat 2·5, przestałyby zachodzić[2]). Rzeczywiście, moglibyśmy wówczas uważać za pole (N_p) funkcję, przyporządkowującą każdemu punktowi przestrzeni Euklidesowej trójwymiarowej, odniesionej do jakiegoś układu współrzędnych Kartezjuszowskich prostokątnych (x, y, z), zbiór prostych, przechodzących przez ten punkt, równoległych do jednej z płaszczyzn $y=0$ i $z=0$ oraz tworzących z osią x-ów kąt nie przekraczający $\pi/4$. Otóż łatwo jest widzieć, iż np. każda prosta

$$y = y_0 + bx, \qquad z = z_0 + cx,$$

gdzie y_0 i z_0 są zupełnie dowolne, a $|b|, |c| \leq \frac{1}{2}$, byłaby granicą ciągu charakterystyk takiego pola, sama będąc charakterystyką tylko jeśli $ab = 0$. Do charakterystyk wspomnianego ciągu również nie stosowałby się lemat 2·5.

Uzasadnimy teraz drugą własność pól (N_p), służącą do dowodu twierdzenia o istnieniu charakterystyk; jest ona podobna do znanej

---

[1]) Zob. np. B. v. Kerékjartó, *Vorlesungen über Topologie*, Berlin, 1923, str. 95—96.

[2]) Już p. Marchaud zwrócił uwagę na znaczenie warunku wypukłości.

własności funkcyj półciągłych zmiennych rzeczywistych, odkrytej przez Baire'a.

2·8. **Twierdzenie.** Oznaczmy przez (C) dowolne pole (N_p), określone w jakiejś dziedzinie U i na jej ograniczeniu, a przytem takie, aby w żadnym punkcie obszaru $\overline{U}$[1]) odnośna miotełka pola (C) nie zawierała prostych równoległych do pewnej płaszczyzny p — 1-wymiarowej, którą oznaczymy przez λ. Istnieje wówczas ciąg pól (N_p) ciągłych, powiedzmy $\{(C_i)\}$, określonych w $\overline{U}$ i takich, że jeśli oznaczymy przez $c_i(P)$ miotełkę pola (C_i) $(i = 1, 2, \ldots)$ odpowiadającą punktowi P a przez $c(P)$ odnośną miotełkę pola (C), wówczas, pod warunkiem, że P należy do $\overline{U}$: 1⁰ $c_i(P)$ nie zawiera żadnej prostej równoległej do λ; 2⁰ $c_i(P)$ zawiera $c_{i+1}(P)$; 3⁰ $c(P)$ jest granicą ciągu $\{c_i(P)\}$, czyli — co na jedno wychodzi — $c(P)$ równa się iloczynowi miotełek ciągu $\{c_i(P)\}$; 4⁰ każda prosta, wchodząca w skład miotełki $c(P)$ jest prostą wewnętrzną[2]) miotełki $c_i(P)$.

Dowód. Zauważmy przedewszystkiem, iż, wybrawszy zupełnie dowolny punkt O, możemy, dla uproszczenia rozumowań, zastąpić pole (C) przez funkcję (C^*), przyporządkowującą punktowi zmiennemu P obszaru $\overline{U}$ miotełkę $c^*(P)$, równoległą do $c(P)$ i mającą wierzchołek w O. Pole (C) wyznacza funkcję (C^*) i naodwrót. W dalszym ciągu zakładać będziemy, iż hyperpłaszczyzna, oznaczona przez λ, przechodzi właśnie przez punkt O. Jedną ze stron λ można zawsze uznać za dodatnią. Przypiszemy teraz każdej prostej, przechodzącej przez O i nie zawartej w λ, wektor jednostkowy zaczepiony w punkcie O, leżący na tej prostej i skierowany ku dodatniej stronie λ. Odpowiedniość ta jest oczywiście jednojednoznaczna i pozwala przedstawiać miotełki o wierzchołku w O i nie zawierające prostych, leżących w λ, zapomocą zbiorów wektorów, odpowiadających prostym, wchodzącym w skład odnośnych miotełek.

Wobec powyższego, jeśli $c_1, c_2, \ldots, c_n$ są to dowolne miotełki o wierzchołku w O i nie zawierające prostych, leżących w hyperpłaszczyźnie λ, oraz jeśli $k_1, k_2, \ldots, k_n$ są to dowolne współczynniki nieujemne i nie wszystkie równe zeru, wówczas określamy agregat

---

[1]) Gdy A jest zbiorem, oznaczamy wogóle przez $\overline{A}$ jego domknięcie.

[2]) Samo przez się rozumie się, iż prostę, należącą do jakiejś miotełki, nazwiemy wewnętrzną względem tej ostatniej, jeśli istnieje liczba dodatnia ε taka, iż rozważana miotełka zawiera każdą prostę, przechodzącą przez jej wierzchołek i tworzącą z omawianą prostą kąt o mierze bezwzględnej, mniejszej niż ε.

$k_1 c_1 + k_2 c_2 + \ldots + k_n c_n$ jako najmniejszą miotełkę, zawierającą ogół prostych, niosących wektory postaci $k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_n v_n$, gdzie $v_1, v_2, \ldots, v_n$ są to wektory przyporządkowane prostym, należącym odpowiednio do $c_1, c_2, \ldots, c_n$, lecz poza tem dowolne. Stwierdzamy z łatwością, iż przy każdym dopuszczalnym układzie wartości współczynników $k_1, k_2, \ldots, k_n$, określona w powyższy sposób miotełka zawiera iloczyn miotełek $c_1, c_2, \ldots, c_n$, zawarta jest w najmniejszej miotełce, zawierającej sumę (teorjomnogościową) tych samych miotełek i jest funkcją ciągłą współczynników $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

Utworzenie agregatu miotełek pozwala na zastosowanie do dowodu naszego twierdzenia rozumowania podobnego do tego, którem się posłużył R. Baire[1]) dla udowodnienia, iż każda funkcja półciągła zmiennych rzeczywistych jest granicą ciągu monotonicznego funkcyj ciągłych. Powtórzymy obecnie w postaci zmodyfikowanej to rozumowanie, które jest dosyć proste.

Wprowadźmy układ współrzędnych Kartezjuszowskich prostokątnych, $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Przy dowolnej wartości naturalnej wskaźnika i, określimy miotełkę $c_i^*(P)$, uważaną za funkcję zmiennego punktu P, najpierw w punktach o współrzędnych postaci

$$\frac{l_1}{2^i}, \frac{l_2}{2^i}, \ldots, \frac{l_p}{2^i},$$

gdzie $l_1, l_2, \ldots, l_p$ są to dowolne liczby całkowite względne, takie, aby kostka p-wymiarowa

$$\left| x_s - \frac{l_s}{2^i} \right| \leqq \frac{1}{2^i} \qquad (s = 1, 2, \ldots, p)$$

zawierała punkty należące do u; mianowicie położymy $c_i^*(P)$ równe najmniejszej miotełce, zawierającej wszystkie wartości funkcji (C^*), odpowiadające punktom obszaru $\overline{U}$, należącym do wspomnianej kostki, i nie zawierającej prostych, należących do hyperpłaszczyzny λ. Następnie, we wszystkich punktach, należących do wnętrza lub do ścian każdej kostki p-wymiarowej

$$(*) \qquad \frac{l_s}{2^i} \leqq x_s \leqq \frac{l_s + 1}{2^i} \qquad (s = 1, 2, \ldots, p),$$

---

[1]) *Sur les séries à termes continus et tous de même signe*, Bull. de la Soc. Mathém. de France, XXXII, 1904, 125—128; *Nouvelle démonstration d'un théorème sur les fonctions discontinues*, *ibid.*, XXVIII, 1900, 173—179.

określonej przez dowolny układ liczb $l_1, l_2, \ldots, l_p$ całkowitych względnych i zawierającej punkty należące do U, poddajemy miotełkę $c_i^*(P)$ warunkowi, aby była funkcją linjową każdej ze współrzędnych punktu P. Mówiąc dokładniej, kładziemy $c_i^*(P)$ równe agregatowi miotełek, przypisanych wierzchołkom powyższej kostki p-wymiarowej, przyczem współczynnik liczbowy, występujący przy miotełce, odpowiadającej któremukolwiek wierzchołkowi, równa się iloczynowi wartości bezwzględnych różnic współrzędnych odpowiednich punktu P i wierzchołka przeciwległego rozważanemu.

Otrzymana w ten sposób funkcja jest w każdym razie określona wewnątrz każdej z rozważanych kostek. Na ścianach i krawędziach, wspólnych kilku takim kostkom, określenie jest wprawdzie wielorakie, lecz łatwo widzieć, iż nie prowadzi do sprzeczności, gdyż rozważany agregat sprowadza się tam do pewnego agregatu miotełek, odpowiadających wierzchołkom, należącym do rozważanej ściany wzgl. krawędzi, przyczem współczynniki nie zależą od tego, z której wyszliśmy kostki, posiadającej daną ścianę, wzgl. krawędź.

Z ciągłości agregatu miotełek względem jego współczynników wynika ciągłość funkcji $c_i^*(P)$ w całym obszarze, w którym ona jest określona. Dalej, z definicji tej funkcji i z uwagi, uczynionej przy określaniu agregatu miotełek, wynika, iż jeśli punkt P należy do jednej z rozważanych kostek, miotełka $c_i^*(P)$ zawiera wspólną część wartości będącej w mowie funkcji dla wszystkich wierzchołków rzeczonej kostki; atoli, według definicji funkcji w wierzchołkach rozważanych kostek, wspólna część miotełek, odpowiadających wierzchołkom takiej kostki, zawiera każdą miotełkę, przypisaną przez funkcję (C^*) jakiemuś punktowi, należącemu do odnośnej kostki. Zatem, w szczególności, miotełka $c_i^*(P)$ zawiera miotełkę, $c^*(P)$.

Łatwo się teraz przekonać, iż granicą ciągu $\{c_i^*(P)\}$ jest właśnie miotełka $c^*(P)$. W rzeczy samej, z definicji funkcji $c_i^*(P)$ i z jednej z uwag, uczynionych w związku z definicją agregatu miotełek, wynika, iż jeśli P należy do $\overline{U}$, to miotełka $c_i^*(P)$ zawarta jest w najmniejszej miotełce, nie zawierającej prostych, należących do hyperpłaszczyzny λ, a zawierającej wszystkie miotełki przypisane przez funkcję (C^*) punktom sześcianu

$$\frac{l_s - 1}{2^i} \leq x_s \leq \frac{l_s + 2}{2^i} \qquad (s = 1, 2, \ldots, p),$$

gdzie liczby $l_1, l_2, \ldots, l_p$ są tak dobrane, aby współrzędne punktu P spełniały nierówności (*). Stąd już, wobec górnej półciągłości funkcji (C^*), wynika, iż granica ciągu $\{c_i^*(P)\}$ zawiera się w $c^*(P)$, a ponieważ $c^*(P) \subset c_i^*(P)$ $(i = 1, 2, \ldots)$, mamy rzeczywiście $c_i^*(P) \to c^*(P)$.

Ponieważ żadna z miotełek, przyporządkowanych przez funkcję (C^*) punktom obszaru $\overline{U}$, nie zawiera prostych, leżących w λ, istnieej (*Cf.* N⁰ 1·2) najmniejsza miotełka, powiedzmy c^*, nie mająca prostych, wspólnych z λ, a zawierająca wszystkie powyższe miotełki. Niech będzie φ najmniejszy kąt, utworzony z hyperpłaszczyzną λ przez proste, należące do c^*. Rzecz jasna, iż $\varphi > 0$. Oznaczmy więc przez $c_i'(P)$ najmniejszą miotełkę, nie zawierającą prostych, leżących w λ, a zawierającą każdą prostę, przechodzącą przez punkt 0 i tworzącą z jakąś prostą miotełki $c_i^*(P)$ kąt niewiększy, niż $2^{-i} \cdot \varphi$. Gdy i jest naturalne, a punkt P należy do $\overline{U}$, $c_i'(P)$ jest więc określoną miotełką. Otrzymane w ten sposób funkcje posiadają, jak widać odrazu, te same własności, które dopiero co znaleźliśmy dla funkcyj ciągu $\{(C_i^*)\}$. Nadto, przy każdej wartości naturalnej wskaźnika i, o ile punkt P należy do $\overline{U}$, każda prosta, należąca do $c^*(P)$ jest prostą wewnętrzną miotełki $c'(P)$.

Połóżmy teraz $c_i''(P)$ równe iloczynowi teorjomnogościowemu miotełek $c_1'(P), c_2'(P), \ldots, c_i'(P)$. Otrzymujemy w ten sposób nowy ciąg funkcji, określonych w $\overline{U}$. Zauważmy odrazu, iż gdy P należy do $\overline{U}$, każda prosta, wchodząca w skład $c^*(P)$, jest prostą wewnętrzną miotełki $c_i''(P)$ przy dowolnem i. Oznaczmy przez P_0 dowolny punkt, należący do $\overline{U}$ a przez l — którąkolwiek z prostych, wchodzących w skład miotełki $c^*(P_0)$. Ponieważ prosta l jest wewnętrzną dla każdej z miotełek $c_1'(P_0), c_2'(P_0), \ldots, c'(P_0)$, a miotełki $c_1'(P), c_2'(P), \ldots, c_i'(P)$ są funkcjami ciągłemi zmiennego punktu P, istnieje otoczenie $W(P_0)$ punktu P_0 takie, że jeśli punkt P doń należy, wówczas prosta l jest wewnętrzną prostą każdej z miotełek $c_1'(P), c_2'(P), \ldots, c'(P)$, a wskutek tego także i miotełki $c_i''(P)$. Dowolna płaszczyzna dwuwymiarowa, przechodząca przez prostę l. wycina z każdej z miotełek $c_1'(P), c_2'(P), \ldots, c_i'(P)$ miotełkę dwuwymiarową, zmieniającą się — z uwagi na warunek wypukłości, któremu podlegają miotełki — w sposób ciągły, gdy zmienia się punkt P, o którym zakładamy, iż należy do $W(P_0)$. Miotełka, wycięta przez rozważaną płaszczyznę z miotełki $c_i''(P)$, jest iloczynem teorjomnogościowym miotełek, wyciętych przez tę samą płaszczyznę z miotełek $c_1(P)$. $c_2'(P), \ldots, c_i'(P)$, a ciągłość jej względem punktu P wynika łatwo

z ciągłości wspomnianych czynników na podstawie ciągłości minimum skończonej ilości ciągłych funkcyj arytmetycznych w zakresie rzeczywistym. Łatwo jednak widzieć, że gdyby miotełka $c_i''(P)$ nie była funkcją ciągłą punktu P, istniałaby płaszczyzna dwuwymiarowa, przechodzącą przez prostę l, któraby wycinała z rozważanej miotełki miotełkę dwuwymiarową nieciągłą. Miotełka $c_i''(P)$ jest więc funkcją ciągłą punktu P.

Łatwo jest teraz stwierdzić, iż utworzony przez nas ciąg funkcyj posiada także pozostałe własności, które zauważyliśmy w ciągu funkcyj $\{c'(P)\}$. Prócz tego jednak jest identycznie

$$c''_{i+1}(P) \subset c''_i(P).$$

Wobec tego, jeśli oznaczymy przez $c_i(P)$ miotełkę równoległą do $c_i''(P)$ i mającą wierzchołek w punkcie zmiennym P, zdefinjowany w ten sposób ciąg pól $\{(C_i)\}$ będzie jednym z tych, których istnienia mieliśmy dowieść

2·9. **Twierdzenie.** Przez każdy punkt regularny dowolnego pola (N_p), położony wewnątrz jego obszaru, przechodzi przynajmniej jedna charakterystyka tego pola.

Dowód. Niech M będzie takim punktem, a λ hyperpłaszczyzną, pochodzącą przez M i nie zawierającą żadnej prostej, należącej do miotełki rozważanego pola w punkcie M. Dzięki półciągłości pola, istnieje wówczas otoczenie $U(M)$ punktu M takie, iż w żadnym punkcie $\overline{U}(M)$ miotełka pola nie zawiera prostych, równoległych do hyperpłaszczyzny λ. Jeśli w $\overline{U}(M)$ rozważane pole, powiedzmy (C), jest ciągłe, a miotełka pola zawiera zawsze proste wewnętrzne, otrzymuje się nieskończenie wiele charakterystyk, przechodzących przez M i osiągających brzeg $U(M)$; wystarczy budować w tym celu odpowiednie linje wieloboczne.

Powyższa konstrukcja jest zawsze możliwa na nieskończenie wiele sposobów, ponieważ — według twierdzenia Heine-Borela i na zasadzie ciągłości pola, o które nam chodzi — można w omawianym przypadku pokryć $\overline{U}(M)$ skończoną ilością otoczeń, z których każdemu da się przyporządkować taki kierunek, aby miotełka pola, odpowiadająca któremukolwiek punktowi rozważanego otoczenia, zawierała prostę równoległą do będącego w mowie kierunku.

Przechodzimy teraz do przypadku ogólnego. Przybliżamy wówczas pole (C) w $\overline{U}(M)$ zapomocą jednego z ciągów pól, których istnienia dowiedliśmy pod nrem 2·8. W stosunku do każdego z pól

tego ciągu, znajdujemy się w szczególnym przypadku, który dopiero co omówiliśmy. Każde z tych pól dopuszcza zatem nieskończenie wiele charakterystyk, przechodzących przez punkt M i osiągających obydwoma końcami brzeg otoczenia $U(M)$. Według nrów 2·4 i 2·5, charakterystyki każdego z pól rozważanego ciągu, przechodzące przez M i osiągające z obu stron brzeg $U(M)$, tworzą zbiór domknięty.

Z drugiej strony, ponieważ proste, należące do paratingensów omawianych charakterystyk, tworzą z hyperpłaszczyzną λ kąty, których kres dolny jest dodatni, można przedstawić te krzywe w układzie współrzędnych Kartezjuszowskich prostokątnych zapomocą funkcyj, spełniających warunek Lipschitza z jednolitym współczynnikiem. Wynika stąd, iż każdy ciąg rozważanych charakterystyk zawiera ciąg wybrany zbieżny. Innemi słowy, zbiory charakterystyk, któremi się zajmujemy, są kompaktyczne. Ponieważ zbiory te są, jak widzieliśmy, domknięte, a ciąg ich — według nru 2·3 — jest spadający, stosuje się do nich twierdzenie Cantora uogólnione. Mają one zatem przynajmniej jeden element wspólny. Atoli element ten jest, jak widać natychmiast, charakterystyką pola (C) i to charakteryką, przechodzącą przez punkt M i osiągającą oboma końcami brzeg otoczenia $U(M)$. Twierdzenie jest zatem udowodnione.

§ 3. *Kilka własności charakterystyk*

Podamy tutaj kilka własności charakterystyk równań paratingensowych. Własności te stanowią uogólnienia znanych własności charakterystyk układów równań różniczkowych zwyczajnych; w szczególności podamy twierdzenia, odpowiadające dość dokładnie trzem pierwszym własnościom, sformułowanym przez p. Marchaud w jego nocie z paryskich C. R.[1]) odnośnie do pól c i ą g ł y c h pół-stożków wypukłych[2]).

3·1. **Założenia.** Oznaczać będziemy przez E continuum ograniczone, mogące się redukować do jednego punktu i zawarte w obszarze jakiegoś pola (N_p), do którego będą się odnosić nasze dalsze rozważania. Oznaczać będziemy dalej przez λ hyperpłaszczyznę $p-1$-wymiarową taką, aby zbiór E znajdował się całkowicie po jednej jej stronie i przyjmiemy, iż każda charakterystyka rozważanego

---

[1]) *loc. cit.*

[2]) Czwarta i ostatnia z własności, wskazanych przez p. M a r c h a u d może być z łatwością rozciągnięta na pola górnie półciągłe (por. dalej § 4 i w szczególności nr 4·1) aproksymując je zapomocą monotonicznych ciągów pól ciągłych.

pola, przechodząca przez dowolny punkt zbioru E, bądź dociera do λ, bądź też może być przedłużona aż do tej hyperpłaszczyzny, nie mając przytem punktów wspólnych z ograniczeniem obszaru rozważanego pola. Nazwiemy wkońcu Z miejsce geometryczne punktów, leżących na łukach charakterystyk, mających jeden koniec należący do E, a drugi należący do λ i zakładać będziemy, iż w żadnym punkcie zbioru $\overline{Z}$[1]) miotełka rozważanego pola nie zawiera prostych, równoległych do λ. Zakładać będziemy także, iż zbiory A i B stanowią zawarte w Z continua, mogące redukować się do jednego punktu.

3·2. **Definicja.** *Strefą emisji* (w stosunku do danego pola (N_p)) *zbioru* A, *ograniczoną przez* A *i* λ nazywać będziemy miejsce geometryczne punktów, leżących na łukach charakterystyk, mających jeden koniec należący do A, a drugi należący do λ; zbiór powyższy oznaczać będziemy w skróceniu symbolem $Z(A)$.

3·3. **Wnioski.** W założeniach nru 3·1:

1⁰. Zbiór $Z(A)$ jest określony.

2⁰. $A \subset Z(A)$.

3⁰. $B \subset Z(A)$ pociąga za sobą $Z(B) \subset Z(A)$.

4⁰. W szczególności, z uwagi na wniosek 2⁰, $B \subset A$ pociąga za sobą $Z(B) \subset Z(A)$.

5⁰. Z wniosku 3⁰ wynika także $Z(A) \subset Z$, gdyż $A \subset Z = Z(E)$.

6⁰. Zbiór Z jest ograniczony.

Rzeczywiście, załóżmy, iż tak nie jest i oznaczmy przez $\{S_i\}$ ciąg kostek p-wymiarowych. takich aby: (a) każda z nich miała jedną ścianę $p-1$-wymiarową zawartą w λ; (b) $S_i \subset S_{i+1}$ $(i = 1, 2, ...)$; (c) $E \subset S_1$; (d) najmniejsza odległość zbioru E od ścian, należących do kostek ciągu $\{S_i\}$ i nie zawartych w hyperpłaszczyźnie λ, rosła nieograniczenie. Oznaczmy przez Z_k miejsce geometryczne punktów łuków charakterystyk, mających jeden koniec, należący do E, a drugi do λ, z tem, aby ten drugi koniec nie był punktem wewnętrznym ściany $p-1$-wymiarowej, wspólnej kostce S_k i hyperpłaszczyźnie λ. Oznaczmy dalej przez Z_k^* wspólną część Z_k i S_k. Zbiór Z_k^* jest więc ograniczony. Zarazem $Z_k^* \subset Z$, gdyż $Z_k \subset Z$. Istnieje przeto dodatni kres dolny kątów, utworzonych z hyperpłaszczyzną λ przez

---

[1]) [Dodane w czasie korekty]. W rzeczywistości, wystarczy założyć to samo w odniesieniu do zbioru Z, gdyż można i wówczas udowodnić, iż Z jest domknięte, a zatem $\overline{Z} = Z$.

proste, wchodzące w skład miotełek pola, odpowiadających punktom, należącym do Z_k^*. Wobec tego, rozumowanie, analogiczne do użytego w dowodzie nru 2·9, wskazuje, iż zbiór łuków charakterystyk, wytwarzających Z_k^*, jest kompaktyczny. Ponieważ jest on widocznie domknięty, wnosimy stąd, iż zbiór Z_k^* jest także domknięty.

Oznaczmy przez z_k^* wspólną część zbioru Z_k^* i brzegu kostki S_1. Jasnem jest, iż dla każdego k naturalnego, jest to zbiór domknięty i niepusty. Atoli z definicji Z_k wynika łatwo, iż identycznie $z_{k+1}^* \subset z_k^*$. Ponieważ wszystkie te zbiory są ograniczone, wynika z twierdzenia Cantora, iż posiadają wspólną część niepustą. W tej wspólnej części wybierzmy punkt P_1. Przez punkt ten przechodzą zatem charakterystyki, wychodzące z E i trafiające λ poza wnętrzem ściany p — 1-wymiarowej, wspólnej hyperpłaszczyźnie λ i dowolnie wybranej kostce ciągu $\{S_i\}$.

Kontynuując powyższe rozumowanie, potrafimy dowieść istnienia ciągu punktów $P_1, P_2, \ldots$, położonych odpowiednio na brzegu kostek $S_1, S_2 \ldots$ i takich, aby dla dowolnego i istniała charakterystyka, łącząca E z λ poprzez punkty $P_1, P_2, \ldots, P_i$. Znajdzie się zatem przynajmniej jedna charakterystyka, przechodząca przez jakiś punkt, należący do E i przez każdy punkt ciągu $\{P_i\}$. Ponieważ żaden z punktów tego ciągu nie leży na λ i ponieważ odległość ich od zbioru E dąży do nieskończoności, łatwo zrozumieć, iż powyższa charakterystyka, wbrew założeniom 3·1, nie jest zawarta w żadnej charakterystyce, łączącej E z λ. Zbiór Z musi zatem być rzeczywiście ograniczony.

7⁰ Wynika stąd, iż zbiór $Z(A)$ jest również ograniczony, jako zawarty w Z.

8⁰ Zbiór łuków charakterystyk, mających jeden koniec należący do A, a drugi do λ, jest domknięty (Cf. nr 2·6).

9⁰ Z dwóch ostatnich wniosków wnosimy dalej, podobnie, jak dopiero co dla zbiorów Z_k^*, iż zbiór $Z(A)$ jest domknięty.

3·4. **Twierdzenie.** W założeniach 3·1, niech będzie $\{A_i\}$ spadający ciąg zbiorów domkniętych i spójnych, zawartych w Z i oznaczmy przez A ich iloczyn. Wówczas

$$Z(A) = \prod_i Z(A_i).$$

Dowód. Ponieważ $Z(A) \subset Z(A_i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$, mamy

$$Z(A) \subset \prod_i Z(A_i);$$

pozostaje zatem do udowodnienia odwrotna inkluzja. Oznaczmy przez M dowolny punkt, należący do iloczynu zbiorów $Z(A_i)$; należy on zatem do każdego z tych zbiorów. Weźmy pod uwagę zbiory łuków charakterystyk, zakończonych z jednej strony na poszczególnych zbiorach A_i a z drugiej strony na λ, a przytem przechodzących przez punkt M. Otrzymujemy ciąg spadający zbiorów (Cf. nr 3·3, 8⁰) domkniętych i zawartych w zbiorze kompaktycznym, mianowicie zbiorze łuków charakterystyk, wytwarzających Z (Cf. nr 3·3, dowód 6⁰). Według uogólnionego twierdzenia Cantora, powyższy ciąg zbiorów posiada więc przynajmniej jeden element wspólny. Jest to łuk charakterystyki, przechodzący przez M i łączący A z λ. Z jego istnienia wynika, iż M należy do $Z(A)$, c. b. d. o.[1]).

Ze względu na nr 3·3, 4⁰, z powyższego twierdzenia wypływa następujący wniosek:

3·5. **Wniosek.** W założeniach 3·1, zbiór $Z(A)$ jest funkcją zbioru A górnie półciągłą ze względu na inkluzję.

3·6. **Twierdzenie.** W założeniach 3·1, część wspólna zbioru $Z(A)$ i hyperpłaszczyzny λ stanowi continuum, chyba, żeby się redukowała do jednego punktu.

Dowód. Zauważmy przedewszystkiem, iż przypadek ogólny sprowadza się z łatwością do przypadku, w którym zbiór A redudukuje się do jednego punktu[2]). Zakładać więc będziemy w dalszym ciągu, iż zbiór A utworzony jest przez jeden jedyny punkt, który oznaczymy literą O.

---

[1]) Łatwo spostrzec, że jeśli zamiast jednego pola (N_p) rozpatrywać będziemy, równocześnie z ciągiem $\{A_i\}$, ciąg pól (N_p), których miotełki w każdym punkcie ich wspólnego obszaru tworzą ciąg spadający, związek, który uzasadniliśmy, da się jeszcze wyprowadzić przez zastosowanie niewielkich zmian w powyższym dowodzie.

[2]) Pod tą postacią, powyższe twierdzenie, w odniesieniu do układów równań różniczkowych, zostało udowodnione przez H. Knesera (*Über die Lösungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen dass der Lipschitz-Bedingung nicht genügt*, Sitz.-Ber. d. Preuss. Akad. d. Wiss., Phys.-Mat. Kl., 1923, 171—174). Dwa inne dowody podali M. Müller (*Beweis eines Satzes des Herrn H. Kneser über die Gesammtheit der Lösungen die ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen durch einen Punkt schickt*, Math. Zschr., **28**, 1928, 349—355) i M. Fukuhara (*Sur les systèmes d'équations différentielles ordinaires*, I, Japanese Journal of Mathematics, **5**, 1929, 345—350). Por. także uwagę E. Kamkego na ten temat (*Zur Theorie der Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen*, II, Acta Math., **58**, 1932, 57—85).

Oznaczmy przez (C) rozważane pole, a przez $c(P)$ miotełkę tego pola w punkcie bieżącym P jego obszaru. Niech będzie θ największy kąt, utworzony z normalną do λ przez proste, wchodzące w skład miotełek pola (C), odpowiadających różnym punktom zbioru $Z(A)$; w naszych założeniach, $0 \leqq \theta < \pi/2$. Niech dalej będzie ε taką liczbą dodatnią, aby $\theta + 4\varepsilon < \pi/2$. Modyfikując, w razie potrzeby, pole (C) w punktach, których odległość od zbioru $Z(A)$ jest większa od stosownie dobranego kresu dolnego, można dopiąć tego, aby: 1⁰ Obszar pola (C) zawierał zbiór Z^* punktów warstwy, zawartej między λ a hyperpłaszczyzną równoległą, przechodzącą przez O, takich, iż proste, łączące je z punktem O tworzą z normalną do λ kąt, nie przekraczający $\theta + 4\varepsilon$; 2⁰ największy kąt. utworzony z normalną do λ, przez proste, wchodzące w skład miotełek pola (C), odpowiadających poszczególnym punktom zbioru Z^*, nie przekraczał miary $\theta + \varepsilon$. Rzecz jasna, iż w ten sposób nie zmieniamy zbioru $Z(A)$.

Niech teraz $\{(C_i)\}$ będzie ciąg pól, aproksymujący pole (C) w zbiorze Z^* zgodnie z twierdzeniem 2·8. Łatwo zrozumieć, iż ciąg ten może być utworzony w taki sposób, aby miotełki poszczególnych pól tego ciągu, odpowiadające punktom zbioru Z^*, nie zawierały prostych, tworzących z normalną do λ kąta, przekraczającego miarę $\theta + 2\varepsilon$; w dalszym ciągu zakładać będziemy, iż warunek ten został spełniony. Można będzie teraz utworzyć jeszcze jeden ciąg pól (N_p), powiedzmy $\{(\mathfrak{C}_i)\}$, o własnościach analogicznych do własności ciągu $\{(C_i)\}$, a przytem taki, aby: 1⁰ miotełki poszczególnych pól tego ciągu, odpowiadające punktom zbioru Z^*, nie zawierały prostych, tworzących z normalną do λ kąt, przekraczający miarę $\varphi + 3\varepsilon$; 2⁰ miotełki pól ciągu $\{(\mathfrak{C}_i)\}$ w każdym punkcie zbioru Z^* zawierały w swem wnętrzu wszystkie proste, wchodzące w skład odnośnych miotełek pola o tym samym wskaźniku w ciągu $\{(C_i)\}$.

Oznaczmy przez $Z_i (i = 1, 2, \ldots)$ strefę emisji, ze względu na pole $(\mathfrak{C}_i)$, punktu O, ograniczoną przez O i λ, przez $L_i (i = 1, 2, \ldots)$ iloczyn Z_i przez λ a przez L iloczyn $Z(A)$ i λ.

Ponieważ jasnem jest, iż zbiór L jest domknięty (Cf. nr 3·3, 9⁰), pozostaje do udowodnienia tylko jego spójność. W tym celu załóżmy, iż zbiór L nie jest spójny. Można go zatem rozłożyć na dwa zbiory domknięte rozłączne. Niech wówczas będą V i W dwa punkty, należące odpowiednio do tych dwóch zbiorów. Ponieważ

$$L = \prod_i L_i,$$

a ciąg $\{L_i\}$ jest spadający (Cf. nr 2·3), wnosimy stąd, iż, począwszy od pewnego wskaźnika, zbiór L_i nie zawiera żadnego continuum, zawierającego jednocześnie V i W. Dojdziemy jednak niebawem do wniosku przeciwnego.

Rzeczywiście, nadajmy wskaźnikowi i dowolną wartość stałą. Istnieje wówczas taka liczba r, że jeśli punkty P i P' należą do Z^*, a ich odległość nie przekracza r, każda prosta należąca do $c(P)$ jest równoległa do jakiejś prostej należącej do miotełki pola (C_i) w punkcie P', a każda prosta, wchodząca w skład miotełki pola (C_i) w punkcie P jest równoległa do jakiejś prostej, należącej do miotełki pola $(\mathcal{C}_i)$ w punkcie P'. Utwórzmy wówczas ciąg skończony hyperpłaszczyzn równoległych, $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$, z których pierwsza przechodzi przez O, ostatnia jest identyczna z λ, a dwie bezpośrednio po sobie następujące nie są nigdy od siebie wzajemnie oddalone o więcej, niż o $r.\cos(\theta + 4\varepsilon)$. Weźmy pod uwagę łuk charakterystyki pola (C), łączący O z V i niech będą odpowiednio $V_0, V_1, \ldots, V_n$ jego punkty wspólne z hyperpłaszczyznami $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (zatem $V_0 = 0$ i $V_n = V$). Z założeń wynika, iż łuk powyższy zawiera się w Z^* a prosta $V_i V_{i+1}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ należy do miotełki pola (C_i) w punkcie V_i, wobec czego linja wieloboczna $V_0 V_1 \ldots V_n$ jest charakterystyką pola $(\mathcal{C}_i)$, położoną w obszarze Z^*. Podobnie, dowolną charakterystykę pola (C), łączącą O z W można zastąpić przez analogiczną linję wieloboczną, powiedzmy $W_0 W_1 \ldots W_n$ (gdzie $W_0 = 0$ i $W_n = W$), tworzącą charakterystykę pola $(\mathcal{C}_i)$, zawartą w obszarze Z^*, przyczem prosta $W_i W_{i+1}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ należy do miotełki pola (C_i) w punkcie W_i.

Zdefinjujemy teraz indukcyjnie skończony ciąg zbiorów $L_i^{(0)}$, $L_i^{(1)}, \ldots, L_i^{(n)}$, położonych odpowiednio w hyperpłaszczyznach $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Zbiór $L_i^{(0)}$ określamy, jako złożony z samego punktu O. Przyjmując za dany zbiór $L_i^{(k)}$ $(k < n)$, oto w jaki sposób utworzymy zbiór $L_i^{(k+1)}$: będzie on sumą przecięć z λ_{k+1} miotełek pola (C_i), odpowiadających poszczególnym punktom zbioru $L_i^{(k)}$. Łatwo stwierdzić indukcyjnie, iż każdy ze zbiorów $L_i^{(0)}, L_i^{(1)}, \ldots, L_i^{(n)}$ stanowi continuum, mogące się redukować do jednego punktu i zawarte w Z_i. Prócz tego, punkty V_k i W_k należą do $L_i^{(k)}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$. W szczególności więc, $L_i^{(n)}$ stanowi continuum, zawarte w Z_i i zawierające punkty V i W. Doszliśmy zatem do sprzeczności, wobec czego twierdzenie jest uzasadnione.

3·7. **Twierdzenie.** [1]) W założeniach 3·1, każdy punkt brzegowy zbioru $Z(A)$, z wyjątkiem punktów wewnętrznych względem λ iloczynu $\lambda . Z(A)$, daje się połączyć z jakimś punktem zbioru A zapomocą charakterystyki, zawartej całkowicie w brzegu zbioru $Z(A)$.

Dowód. Niech będzie M dowolny punkt brzegu $Z(A)$, nie należący do wnętrza względem λ iloczynu $\lambda . Z(A)$, ani też do zbioru A. Oznaczmy przez λ' hyperpłaszczyznę $p-1$-wymiarową, równoległą do λ i oddzielającą M od wszystkich punktów zbioru A, połączonych z tym punktem zapomocą charakterystyk; powiadamy, iż istnieje przynajmniej jeden punkt tej hyperpłaszczyzny, należący do brzegu $Z(A)$, przez który przechodzi jedna, lub więcej charakterystyk, łączących M z A.

Rzeczywiście, przypuśćmy, iż tak nie jest. Modyfikując, w razie potrzeby, rozważane pole w punktach, których odległość od $Z(A)$ przekracza pewne dodatnie minimum, można zawsze zrealizować założenia 3·1 w stosunku do pewnego otoczenia punktu M, rozpatrywanego na miejsce zbioru E i do hyperpłaszczyzny λ' zamiast λ. Rzecz jasna, iż zbiór $Z(A)$ nie ulega przytem zmianie. Oznaczmy przez L iloczyn hyperpłaszczyzny λ' przez strefę emisji punktu M, ograniczoną przez M i λ'. Ponieważ (Cf. nr 3·6) L stanowi continuum albo redukuje się do jednego punktu, a nie może być rozłączne z $Z(A)$, gdyby L było rozłączne z brzegiem $Z(A)$, byłoby zawarte we wnętrzu tego zbioru. Atoli wówczas (Cf. nr 3·4 lub też 3·5), gdyby otoczenie V punktu M było dostatecznie małe, iloczyn przez λ' strefy emisji $\bar{V}$, ograniczonej przez $\bar{V}$ i λ' różniłby się dostatecznie mało od zbioru L, aby być również zawartym w $Z(A)$, skąd wynikałoby $V \subset Z(A)$, co jest sprzeczne z założeniami.

Niech teraz będzie $\{\lambda_i\}$ ciąg hyperpłaszczyzn $p-1$-wymiarowych równoległych do λ i wypełniających wszędzie gęsto warstwę, zawartą między λ' i hyperpłaszczyzną równoległą, przechodzącą przez M. Oznaczmy przez $\gamma_k (k = 1, 2, \ldots)$ zbiór charakterystyk, łączących M z A i przebijających każdą z hyperpłaszczyzn $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$

[1]) Jest to uogólnienie odnośnego twierdzenia dla równań różniczkowych (Cf. M. Fukuhara, *Sur les systèmes d'équations différentielles ordinaires*, II, Japanese Journal of Math., **6**, 1929/30, 269—299, jak również M. Fukuhara i M. Nagumo, *Un théorème relatif à l'ensemble des courbes intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires*, Proc. of the Phys.-Math. Soc. of Japan, (3) **12**, 1930, 233—239. Dowód, który podaję, jest analogiczny do dowodu E. Kamkego (*loc. cit.*).

w punkcie brzegowym zbioru $Z(A)$. Z tego, co wyżej powiedziano, łatwo wynika, iż żaden z tych zbiorów nie jest pusty. Zbiory te są, rzecz jasna, domknięte, a przytem, jak widzieliśmy, kompaktyczne (por. dowód nru 3·4). Ponieważ nadto tworzą one ciąg spadający, można do nich zastosować twierdzenie Cantora uogólnione. Atoli każdy element wspólny tym wszystkim zbiorom stanowi charakterystykę, zawierającą łuk, łączący M z λ' i zawarty w brzegu $Z(A)$. Stosując teraz do drugiego końca powyższego łuku to samo rozumowanie, którego użyliśmy w stosunku do punktu M, zdołamy stopniowo przedłużać powyższy łuk w stronę zbioru A, aż do uzyskania jednej z charakterystyk, których istnienia mieliśmy dowieść.

3·8. **Uwaga.** W szczególnym przypadku $p=2$ wyprowadzamy z powyższych dwóch twierdzeń istnienie dwóch charakterystyk, ograniczających rozważaną strefę emisji. Odpowiadają one całkom: górnej i dolnej równania różniczkowego.

W ogólności, własności topologiczne charakterystyk równań paratingensowych okazują się zupełnie analogicznemi do odnośnych własności całek układów równań różniczkowych.

§ 4. *Uwagi o rozmaitych uogólnieniach pojęcia równania różniczkowego*

4·1. **Równoważność warunku contingensowego p. Marchaud z równaniem paratingensowem.** P. Marchaud[1]) rozważa pola półstożków; rzecz jasna, iż ze stanowiska (na którem on właśnie stoi) badania pól pozbawionych punktów osobliwych i określonych w dziedzinach jednospójnych, nie zmienimy nic istotnego w jego rozważaniach, jeśli za punkt wyjścia przyjmiemy pole stożków (t. j., według naszej terminologji, miotełek) zamiast pola półstożków. Odrzucając zaś powyższe ograniczenie punktu widzenia, należy uznać pola stożków za ogólniejsze, gdyż z każdego półciągłego pola półstożków można uzyskać takież pole stożków, ale nie naodwrót.

Z powyższem zastrzeżeniem, pola, rozpatrywane przez p. Marchaud stanowią pola (N_p), posiadające pewne szczególne własności, z których najważniejszą jest ciągłość. Przypuśćmy jednak, iż dane jest dowolne pole (N_p); w stosunku do niego, warunek contingensowy p. Marchaud[2]) ma zawsze jeszcze sens. Ponieważ proste,

[1]) C. R. paryskie, *loc. cit.*

[2]) T. j. warunek, aby contingens łuku w każdym jego punkcie zawierał się w odnośnej miotełce rozważanego pola; łuk spełniający ten warunek, nazywa p. Marchaud *całką* pola.

niosące promienie, wchodzące w skład contingensu, należą do paratingensu [1]), jasnem jest, iż charakterystyki równania paratingensowego, wytworzonego przez rozważane pole, są zarazem całkami tego pola w sensie p. Marchaud.

Aby się przekonać o zachodzeniu odwrotnej inkluzji, przynajmniej w odniesieniu do łuków, nie zawierających punktów osobliwych rozważanego pola, zwróćmy uwagę na którąkolwiek całkę (w sensie p. Marchaud), powiedzmy a, będącego w mowie pola. Oznaczmy przez P_0 dowolny punkt tej całki, a więc punkt regularny pola, i nazwijmy c_0 miotełkę tego ostatniego w punkcie P_0. Istnieje więc hyperpłaszczyzna p — 1-wymiarowa, powiedzmy λ, przechodząca przez P_0 i nie zawierająca żadnej prostej, wchodzącej w skład c_0. Przyjmując, iż liczba ε jest mniejsza od miary najmniejszego kąta, utworzonego z hyperpłaszczyzną λ przez proste, wchodzące w skład c_0, oznaczmy przez c_ε najmniejszą miotełkę, nie zawierającą prostych, leżących w λ, a pokrywającą zbiór prostych, przechodzących przez P_0 i tworzących z prostemi miotełki c_0 kąty, nie przekraczające miary ε. Istnieje wówczas, na mocy półciągłości pola, otoczenie $V(P_0)$ punktu P_0, takie, iż w każdym punkcie tego otoczenia miotełka pola jest równoległa do jakiejś miotełki, zawartej w c_ε. Wnosimy stąd, iż każda cięciwa, odpowiadająca części łuku a, zawartej w $V(P)$ jest równoległa do jakiejś prostej, zawartej w c_ε [2]). Atoli, wobec lokalnej spójności łuku a, każda sieczna, spotykająca go w dwóch punktach różnych i dostatecznie bliskich punktu P, zawiera cięciwę jakiejś części rozważanego łuku, zawartej w $V(P_0)$. Wobec tego, paratingens łuku a w punkcie P_0 zawiera się w c_ε. Ponieważ liczba ε jest dowodnie mała, wynika stąd, iż paratingens łuku a w punkcie P_0 zawiera się rzeczywiście w c_0, c. b. d. o.

Niema więc żadnej istotnej różnicy pomiędzy warunkami contingensowemi, rozważanemi przez p. Marchaud, a równaniami paratingensowemi, poza tem, iż p. Marchaud przyjmuje pewne dodatkowe założenia, które jednak bynajmniej nie są potrzebne do ważności wypowiadanych przez niego twierdzeń.

4·2. Możliwość niektórych innych uogólnień. Można sobie postawić pytanie, czy nie dałoby się rozważać warunku contingensowego

---

[1]) Cf. G. Bouligand, *Introduction à la géométrie infinitésimale directe*, str. 72. Jest to zresztą bezpośrednio widoczne.

[2]) Dowód jest zupełnie podobny do dowodu nru 2·5.

w warunkach regularności, w których całki p. Marchaud nie byłyby już równoważne z charakterystykami równań paratingensowych. Nie wchodząc w szczegóły, zauważę tylko, iż własność charakterystyk, wyrażona pod nrem 2·6, wydaje się jedną z najbardziej podstawowych własności charakterystyk równań różniczkowych, względnie paratingensowych i że wartość uogólnień pojęcia równania różniczkowego, których charakterystyki nie posiadają już tej własności, jest chyba wątpliwa [1]. Atoli chwila namysłu wystarczy do zdania sobie sprawy, iż wspomniana własność zależy w sposób istotny od górnej półciągłości ze względu na inkluzję rozważanych pól miotełek. Dałoby się, być może, udowodnić dla warunku contingensowego, w założeniu dolnej półciągłości ze względu na inkluzję twierdzenie o istnieniu całek, analogiczne do klasycznego twierdzenia dla równań różniczkowych; jednakowoż poniższy przykład, należący do najprostszych, wskazuje, iż wówczas łuk, stanowiący granicę ciągu całek, niekoniecznie spełnia rozważany warunek contingensowy. Rzeczywiście, w płaszczyźnie Euklidesowej, odniesionej do układu współrzędnych Karterjuszowskich prostokątnych xOy, weźmy pod uwagę pole, którego miotełka w punktach, dla których $x+y$ jest całkowite, sprowadza się do równoległej do osi odciętych, a we wszystkich innych punktach składa się ze wszystkich prostych, przechodzących przez odnośny punkt i tworzących z osią odciętych kąt, nie przekraczający miary $\pi/4$. Wówczas każda z prostych $x+y=n$, gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą, stanowi granicę ciągu charakterystyk, utworzonych przez proste równoległe; niemniej jednak, taka prosta nie spełnia sama w żadnym punkcie rozważanego warunku contingensowego.

4·3. Zastosowanie do pewnego zagadnienia p. Marchaud. P. Marchaud, w cytowanej już przeze mnie pracy [2]), poprzedzającej zresztą chronologicznie moją notę do C. R. paryskich (*loc. cit.*), szuka dla istnienia całek układu równań różniczkowych

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

---

[1]) Warto zwrócić uwagę na to, iż całki układów równań różniczkowych C. Carathéodory'ego, uogólnionych zresztą z całkiem innego punktu widzenia, niż nasz, posiadają również omawianą własność. Cf. C. Carathéodory, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, 2 Aufl., Leipzig, 1927, str. 665 i nast.

[2]) *Sur les champs de demi-droites et les équations différentielles.*

warunków ogólniejszych od klasycznego warunku ciągłości i przystępuje do badania pól półprostych. Nie przypominając tutaj zajmujących wyników, które przynosi ta rozprawa, ani też oznaczeń, wprowadzonych przez jej autora, zauważymy tylko, iż jego wyniki, dotyczące układów równań różniczkowych, dadzą się z łatwością wyprowadzić z rozważania równania paratingensowego, wytworzonego przez pole kresów wypukłych (*bornes convexes*) pola półprostych, rozważanego przez p. Marchaud. Rzeczywiście, z łatwością dowodzi się przez indukcję, że jeśli np. pole półprostych jest regularne w sensie p. Marchaud, każda charakterystyka pola kresów wypukłych dostarcza zarazem całki w sensie p. Marchaud; z drugiej strony, jasnem jest, iż, naodwrót, każda całka w sensie p. Marchaud stanowi zarazem charakterystykę pola kresów wypukłych.

4·4. **Równania różniczkowe.** Samo przez się rozumie się, iż jeśli weźmiemy pod uwagę pola (N_p), których miotełki w każdym punkcie redukują się do pojedyńczej prostej i tworzą pola prostych, dających się zorjentować w sposób ciągły, odnajdziemy klasę równań różniczkowych w ujęciu klasycznem.

Kończąc, pragnę wyrazić gorące podziękowanie panom profesorom T. Ważewskiemu i W. Wilkoszowi za życzliwe i cenne rady, dotyczące redakcji niniejszej pracy, których mi nie szczędzili w czasie licznych rozmów, odbytych ze mną.